Kartkówka 24.05.2018

(poprawa z 22.05)

Zadanie 1. Podać dyfeomorfizm przekształcający

a) odcinek $(0,1)$ na półprostą $(0,\infty)$,

b) odcinek $(2,5)$ na odcinek $(2,11)$.

---

a) Wystarczy znaleźć jakąś funkcję na jakimś odcinku, która ma skończoną granicę na jednym końcu i nieskończoną na drugim (np. $1/x$, $\operatorname{tg} x$, $\ln x$), a następnie odpowiednio ją zmodyfikować. W ten sposób otrzymujemy przykłady

$$x \mapsto \frac{1}{x} - 1, \quad x \mapsto \frac{1}{1-x}, \quad x \mapsto \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{2} \cdot x\right), \quad x \mapsto -\ln x.$$

b) Oba odcinki są skończone, więc można przeprowadzić jeden na drugi funkcją liniową

$$x \mapsto ax + b$$

po odpowiednim dobraniu współczynników a, b. Zależnie od tego, czy chcemy przeprowadzać 2 na 2 i 5 na 11, czy też odwrotnie, otrzymujemy

$$x \mapsto 3x - 4 \qquad \text{lub} \qquad x \mapsto -3x + 17.$$

Zadanie 2. Dana jest funkcja $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ klasy C^1, dla której

$$f(0,0) = 1, \quad \frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = a, \quad \frac{\partial f}{\partial y}(0,0) = b.$$

Rozważmy wykres funkcji f, czyli zbiór

$$\Big\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : z = f(x,y)\Big\}.$$

Podać wzór opisujący płaszczyznę styczną do tego wykresu w punkcie $(0,0,1)$ (równaniem lub parametrycznie, wedle gustu).

Płaszczyznę styczną do wykresu otrzymujemy wzorem

$$\Big\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : z - 1 = a \cdot (x - 0) + b \cdot (y - 0)\Big\},$$

przy czym liczby $1, 0, 0$ w powyższym wzorze odpowiadały kolejno: wartości funkcji f w $(0,0)$ (czyli trzeciej współrzędnej badanego punktu), pierwszej współrzędnej badanego punktu, drugiej współrzędnej badanego punktu.